Solución de los Polinomios de Legendre

Ramos Villalobos Kelvin Julinio*

Escuela de Fisica, Universidad Nacional de Trujillo, Perú

28 de julio del 2018

Abstract

Debido al gran uso de los polinomios de Legendre en el ámbito de la Física, se resolvieron algunos problemas con la intensión de dar a conocer las propiedades de tales polinomios. La resolución de estos ejercicios se hizo con el apoyo tanto de las ideas de mis compañeros como del profesor que en su momento enseñaba el curso de Física Matemática en la U.N.T.

Ejercicios

1. Demuestre que:

$$\int_{-1}^{1} x^{2r} P_{2n}(x)dx = \frac{2^{2n+1}(2r)!\,(r+n)!}{(2r+2n+1)!\,(r-n)!}$$

Solución

Como

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{(2)^{2n}(2n)!}[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}]$$

$$\int_{-1}^{1} x^{2r}\frac{1}{(2)^{2n}(2n)!}[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}]dx = \frac{1}{(2)^{2n}(2n)!}\int_{-1}^{1} x^{2r}[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}]dx$$

integrando por partes $2n$ veces, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^{2r}\frac{1}{(2)^{2n}(2n)!}[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}]dx &= \frac{(2r)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}(2n)!}\int_{-1}^{1} x^{2r-2n}(x^2-1)^{2n}dx \\
&= \frac{(2r)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}(2n)!}\int_{-1}^{1} x^{2(r-n)}(x^2-1)^{2n}dx \\
&= 2[\frac{(2r)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}(2n)!}\int_{0}^{1} x^{2(r-n)}(x^2-1)^{2n}dx]
\end{aligned}$$

hacemos el cambio de variable $t = x^2$, así $dt = 2xdx$, por tanto $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, remplazando

$$= 2[\frac{(2r)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}(2n)!}\int_{0}^{1} t^{(r-n)}(t-1)^{2n}\frac{dt}{2\sqrt{t}}] = \frac{(2r)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}(2n)!}\int_{0}^{1} t^{(r-n-1/2)}(1-t)^{2n}dt$$

Comparando esta ultima expresión con la función beta, el cual esta definida como:

$$B(m,n) = \int_{0}^{1} t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

*kelvin.ramosv@hotmail.com

y haciendo uso de la propiedad $\Gamma(n+1) = n!$ tenemos,

$$= \frac{(2r)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}(2n)!}\frac{\Gamma(r-n-1/2+1)\Gamma(2n+1)}{\Gamma(r+n+1/2+1)} = \frac{(2r)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}(2n)!}\frac{(r-n-1/2)!\,(2n)!}{(r+n+1/2)!}$$

Para resolver esta ultima expresión, hacemos uso de la propiedad:

$$(n+1/2)! = \frac{\pi^{1/2}(2n+1)!!}{2^{n+1}}$$

De manera que:

$$\int_{-1}^{1} x^{2r}\frac{1}{(2)^{2n}(2n)!}[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}]dx = \frac{(2r)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}(2n)!}\frac{\pi^{1/2}[2(r-n-1)+1]!!\,(2n)!\,(2n)!\,2^{r+n+1}}{[2^{(r-n-1)+1}]\pi^{1/2}[2(r+n)+1]!!}$$

Simplificando y haciendo uso de otra propiedad de factorial,

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

tenemos

$$\int_{-1}^{1} x^{2r}\frac{1}{(2)^{2n}(2n)!}[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}]dx = \frac{(2r)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}}\frac{[2(r-n-1)+1]!\,2^{(r+n)}\,[2^{(r+n+1)}(r+n)!]}{[2^{(r-n-1)+1}](r-n-1)!\,[2(r+n)+1]!\,2^{(r-n-1)}}$$

$$= \frac{(2r)!\,(2r-2n-1)!\,2^{(2r+2n+2)}\,(r+n)!}{(2r-2n)!\,(2)^{2n}2^{(2r-2n)}(r-n-1)!\,(2r+2n+1)!} = \frac{(2r)!\,(2r-2n-1)!\,2^{(2n+2)}\,(r+n)!}{(2r-2n)!\,(r-n-1)!\,(2r+2n+1)!}$$

$$= \frac{(2r)!\,(2r-2n-1)!\,2^{(2n+2)}\,(r+n)!(r-n)}{2(r-n)(2r-2n-1)!\,(r-n)!\,(2r+2n+1)!} = \frac{(2r)!\,2^{(2n+1)}\,(r+n)!}{(r-n)!\,(2r+2n+1)!}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-1}^{1} x^{2r}\frac{1}{(2)^{2n}(2n)!}[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}]dx = \frac{2^{(2n+1)}(2r)!\,(r+n)!}{(2r+2n+1)!\,(r-n)!}$$

En el transcurso de los días, con más ejercicios, se concluirá este trabajo.

Bibliografía

[1] G. Arfken *Métodos matemáticos para físicos* 1ra Edición. México