Deducción de la Ley de Stokes

Ramos Villalobos, Kelvin Julinio*
Escuela de Física, Universidad Nacional de Trujillo, Perú
(Dated: 24 de septiembre de 2020)

Se considera un flujo de un fluido viscoso alrededor de una esfera moviéndose lentamente. Se asume que el fluido completa todo el espacio y que el flujo es estático. El número de Reynolds, basado en la velocidad de la esfera y su diámetro, es muy pequeño comparado a la unidad así usamos la ecuación de Stokes. Se deduce matemáticamente que la ley de Stokes $F = 6\pi R\mu u$ y se confirma que para un flujo de Stokes sobre un objeto (esfera) no depende de su densidad, sino solo de la velocidad $\vec{u}$, la longitud característica del objeto(esfera) R y la viscosidad del fluido μ. .

Palabras clave: Ecuación de Navier-Stokes, flujo de Stokes, ley de Stokes.

I. ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES

La ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible con viscosidad μ constante es dado por[2, Cengel-2006]

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{v} \tag{1}$$

donde $D\vec{v}/Dt$ es la derivada material de la velocidad, definida por

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v} \tag{2}$$

Si el flujo es estacionario, $\partial\vec{v}/\partial t = 0$ y se desprecia los efectos gravitatorios, entonces la ecuación de Navier-Stokes en (1) toma la forma siguiente[1, Landau-1985]

$$\rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} \tag{3}$$

si consideramos un fluido con número de Reynolds[1] pequeño, entonces se desprecia el término $\vec{v}(\nabla.\vec{v})$,[2] y en consecuencia (3) se reduce a la expresión siguiente [5, Garcia-2014]

$$\mu \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p = 0 \tag{4}$$

Aplicando el operador rotacional a la ecuación (4), y considerando la propiedad $\nabla \times \nabla f = 0$, se obtiene

$$\Delta(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0 \tag{5}$$

La ecuación (5) viene a ser la ecuación de movimiento, para un flujo con número de Reynolds pequeño, estacionario e incompresible, junto con la ecuación de continuidad que para este tipo de fluido toma la forma siguiente:

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \tag{6}$$

II. FLUJO QUE PASA ALREDEDOR DE UNA ESFERA

Se considera una esfera en movimiento rectilíneo y uniforme en un fluido viscoso (equivalente al problema del movimiento de un flujo que pasa alrededor de una esfera fija, teniendo el fluido una velocidad $\vec{u}$ en el infinito). El fluido está en reposo en el infinito, mientras que la esfera se mueve con velocidad $-\vec{u}$. Además de considerar un flujo estacionario, se tiene en consideración un flujo que pasa rodeando una esfera fija, puesto que cuando la esfera se mueve, la velocidad del fluido en un punto cualquiera del espacio varía con el tiempo [1, Landau-1985]. En un sistema de referencia ubicado en el centro de la esfera, las condiciones de frontera son: $\vec{v} = 0$ en $r = R$ y $\vec{v} \to u\hat{e}_z$ cuando $r \to \infty$ con $-u\hat{e}_z$ es a velocidad de la esfera en un sistema en reposo. Usaremos coordenadas esféricas para aprovecha la simetría axial del flujo alrededor del eje z, Fig.(1) en consecuencia, la velocidad y la presión solamente tendrán dependencia en r y θ, y además la velocidad $\vec{v}$ no tendrá componente en $\hat{e}_\varphi$.

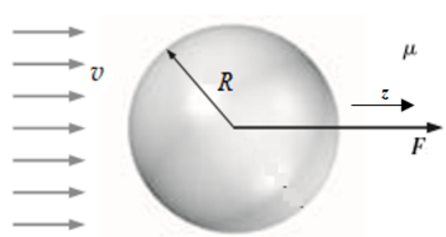

Figura 1. Fluido sobre una esfera

Definimos el vector $\vec{w}$ de tal manera que esta sea cero en el infinito, esto es

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u} \tag{7}$$

Al aplicar la divergencia a (7) se obtiene

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{w} + \vec{\nabla}.\vec{u}$$

y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (6) y considerando que la velocidad $\vec{u}$ es constante, la ecuación

---

* kelvin.ramosv@hotmail.com

[1] El número de Reynolds Re es un parámetro adimensional que sirve para determinar el comportamiento de un fluido. El fluido tendrá un comportamiento laminar si $Re \leq 2000$ y será turbulento si $Re \geq 4000$. Si las fuerzas inerciales son pequeñas, comparadas con las viscosas, entonces $Re \ll 1$.

[2] La ecuación de movimiento en términos del número de Reynolds (Re) es escrita como: $Re\partial\vec{u}/\partial\tau + Re\vec{u}.\vec{\nabla}\vec{u} = -\vec{\nabla}p + \Delta\vec{u}$, donde $\vec{u}$, p, $\vec{x}$ y τ representan respectivamente la velocidad, presión, coordenada espacial y temporal adimensionales.[3, Michel-2015]

anterior resulta ser

$$\vec{\nabla}.\vec{w} = 0 \tag{8}$$

El resultado (8) se puede explotar aún más al hacer uso de la propiedad de que la divergencia del rotacional de una función es igual a cero, i.e $\vec{\nabla}.\vec{\nabla} \times f = 0$. Esto nos conduce a

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{9}$$

Al sustituir (9) en (7) se obtiene

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{u} \tag{10}$$

$\vec{A}$ es un vector axial, depende solo de $\vec{r}$ y es función lineal de $\vec{u}$. El único vector axial que puede construirse para un cuerpo con simetría total con dos vectores polares es el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{u}$ [1, Landau-1985]. Por ende $\vec{A}$ tiene la forma

$$\vec{A} = \nabla f(r) \times \vec{u} \tag{11}$$

donde $f(r)$ se define a partir de una función escalar de $f'(r)$ y del vector unidad en la dirección del radio vector $\hat{r}$ como $\vec{\nabla} f(r) = f'(r).\hat{r}$ [1, Landau-1985]. En consecuencia, (9) viene a ser

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\nabla f(r) \times \vec{u}) \tag{12}$$

Como $\vec{u}$ es constante, entonces $\vec{\nabla} f(r) \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times f\vec{u}$ y por ende la ecuación anterior resulta ser

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \nabla \times f(r)\vec{u} \tag{13}$$

Al sustituir (13) en (10) obtenemos

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times f(r)\vec{u} + \vec{u} \tag{14}$$

Tomando el rotacional de (14) y haciendo uso de la identidad $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times F = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.F) - \Delta F$, se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times f(r)\vec{u} + \vec{\nabla} \times \vec{u} \\ &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}. - \Delta) f(r)\vec{u} \\ &= -\Delta(\vec{\nabla} \times f(r)\vec{u}) \end{aligned} \tag{15}$$

Seguidamente se aplica el operador laplaciano a (15)

$$\Delta(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\Delta^2(\vec{\nabla} \times f(r)\vec{u}) \tag{16}$$

Considerando (5) y sabiendo que $\vec{u}$ es constante, entonces $\vec{\nabla} \times (f\vec{u}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} f)$. Esto se sustituye en la ecuación anterior

$$\Delta^2(\vec{\nabla} \times f(r)\vec{u}) = \Delta^2(\vec{\nabla} f(r)) \times \vec{u} = 0 \tag{17}$$

de donde se deduce

$$\Delta^2(\vec{\nabla} f(r)) = \vec{\nabla}(\Delta^2 f(r)) = 0 \tag{18}$$

En primera integración de la ecuación (18) se obtiene

$$\Delta^2 f(r) = \text{constante} \tag{19}$$

La constante debe ser nula, puesto que la velocidad $\vec{v}$ y sus derivadas debe anularse en el infinito [1, Landau-1985]. Luego, como estamos considerando simetría esférica, el laplaciano es dado por

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr}) \tag{20}$$

y en (19) se tiene

$$\Delta^2 f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr})\Delta f(r) = 0 \tag{21}$$

desarrollando

$$\frac{d^2}{dr^2}\Delta f(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\Delta f(r) = 0 \tag{22}$$

La ecuación diferencial lineal (22) es una ecuación de Cauchy-Euler.[3] En consecuencia, su solución es r^m con m a determinarse.

$$\begin{gathered} \frac{d^2}{dr^2}r^m + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}r^m = 0 \\ (m)(m-1) + 2m = 0 \end{gathered}$$

de donde $m_1 = 0$ y $m_2 = -1$. Por lo tanto, la solución a (22) es

$$\Delta f(r) = \frac{A}{r} + B \tag{23}$$

Con A y B constantes. Debido a que la velocidad en el infinito ($r \to \infty$) es cero, entonces $B = 0$, esto implica $\Delta f(r) = A/r$, por ende

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr})f(r) = A/r \tag{24}$$

o también

$$\frac{d^2}{dr^2}f(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}f(r) = \frac{A}{r} \tag{25}$$

La ecuación (25) es una ecuación diferencial no-homogénea. Las soluciones de la ecuación homogénea son $f_1(r) = 1$, $f_2(r) = 1/r$. La solución particular obtenida por *variación de parámetros* es $f_p = Ar/2$. Y por lo tanto, su solución es dado por

$$f(r) = \frac{A}{2}r - \frac{c_1}{r} + c_2 \tag{26}$$

[3] Toda ecuación diferencial lineal de la forma $a_n x^n d^n y/dx^n + a_{n-1}x^{n-1}d^{n-1}/dx^{n-1} + ... + a_1 x dy/dx + a_0 y = g(x)$, con $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ constantes, se denomina *ecuación de Cauchy-Euler*.[4, Zill-2008]

Con c_1 y c_2 constantes. Considerando $c_2 = 0$ (debido a que la velocidad viene dado como la deriva de $f(r)$) e introduciendo las constantes $a = A/2$ y $b = -c_1$, la solución a (25) es

$$f(r) = ar + \frac{b}{r} \tag{27}$$

Reemplazando $f(r)$ en (14) y usando las propiedades del cálculo vectorial

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (ar + b/r)\vec{u} + \vec{u} \\ &= \vec{\nabla}.\vec{\nabla}(ar + b/r)\vec{u} - \Delta(ar + b/r)\vec{u} + \vec{u} \\ &= a\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(r\vec{u}) + b\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(\vec{u}/r) + \vec{u}\end{aligned}$$

de donde se obtiene que la velocidad $\vec{v}$ del fluido viene dado por

$$\vec{v} = \vec{u} - a\frac{\vec{u} + \hat{r}(\vec{u}.\hat{r})}{r} + b\frac{3\hat{r}(\vec{u}.\hat{r} - \vec{u})}{r^3} \tag{28}$$

Imponiendo las condiciones en la superficie de la esfera: en $(r = R)$ se tiene $\vec{v} = 0$. Por lo tanto

$$\vec{u} - a\frac{\vec{u} + \hat{r}(\vec{u}.\hat{r})}{R} + b\frac{3\hat{r}(\vec{u}.\hat{r} - \vec{u})}{R^3} = 0$$

$$\vec{u}(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}) + \hat{r}(\vec{u}.\hat{r})(\frac{3b}{R^3} - \frac{a}{R}) = 0 \tag{29}$$

Como (29) debe ser valida para todo $\hat{r}$, los coeficientes de $\vec{u}$ y $\hat{r}(\vec{u}.\hat{r})$ deben anularse y en consecuencia

$$\frac{a}{R} + \frac{b}{R^3} - 1 = 0, \qquad \frac{3b}{R^3} - \frac{a}{R} = 0 \tag{30}$$

Al resolver (30), se obtiene los valores de las constantes $a = 3R/4$ y $b = R^3/4$. Conociendo el valor de las constantes a y b, la función $f(r)$ en (27) y la velocidad $\vec{v}$ en (28) vienen a ser,

$$f(r) = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r} \tag{31}$$

$$\vec{v} = \vec{u} - 3R\frac{\vec{u} + \hat{r}(\vec{u}.\hat{r})}{4r} + R^3\frac{3\hat{r}(\vec{u}.\hat{r} - \vec{u})}{4r^3} \tag{32}$$

respectivamente. En coordenadas esféricas

$$v_r = ucos\theta\left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right) \tag{33}$$

$$v_\theta = -usen\theta\left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right) \tag{34}$$

Esto da la distribución de velocidades alrededor de la esfera móvil.[1, Landau-1985]
Por otro lado, al sustituir (10) en (4) y aprovechando las identidades de los operadores, se tiene

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}p &= \mu\Delta\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (f\vec{u}) \\ &= \mu\Delta(\vec{\nabla}\vec{\nabla}.f\vec{u} - \vec{u}\Delta f) \\ &= \mu\Delta\vec{\nabla}\vec{\nabla}.f\vec{u} - \mu\vec{u}\Delta^2 f\end{aligned}$$

sabiendo que $\Delta^2 f(r) = 0$ y teniendo en cuenta la propiedad vectorial $\vec{\nabla}.(f\vec{u}) = f(\vec{\nabla}.\vec{u}) + \vec{u}.(\vec{\nabla}f)$ entonces la ecuación anterior es

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}p &= \mu\Delta\vec{\nabla}\vec{\nabla}.f\vec{u} \\ &= \vec{\nabla}(\mu\Delta\vec{\nabla}.f\vec{u}) \\ &= \vec{\nabla}(\mu\vec{u}.\vec{\nabla}\Delta f)\end{aligned}$$

de donde se deduce que la presión está dado por

$$p = \mu\vec{u}.\vec{\nabla}\Delta f + p_0 \tag{35}$$

donde p_0 es la presión en el infinito. Finalmente al sustituir el valor de $f(r)$ se obtiene

$$\begin{aligned}p &= p_0 + \mu\vec{u}.\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr}(\frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r}))\right) \\ &= p_0 + \mu\vec{u}.\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(\frac{3}{4}Rr^2 - \frac{R^3}{4})\right) \\ &= p_0 + \mu\vec{u}.\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(\frac{3}{4}Rr^2 - \frac{R^3}{4})\right) \\ &= p_0 + \mu\vec{u}.\vec{\nabla}\left(\frac{3}{2r}R\right)\end{aligned}$$

El coordenadas esféricas, la parte radial del gradiente es $\vec{\nabla} = \hat{r}\partial/\partial r$, y por ende

$$p = p_0 - \mu\frac{3\vec{u}.\hat{r}}{2r^2}R \tag{36}$$

Para calcular la fuerza $\vec{F}$ ejercida por el fluido móvil sobre la esfera tomamos coordenadas esféricas con el eje polar paralelo a $\vec{u}$ y por simetría, todas las magnitudes son funciones unicamente de r y del ángulo polar θ. La fuerza $\vec{F}$ es paralela a la velocidad $\vec{u}$. Tomado de (36) la componente normal y tangencial a la superficie de la fuerza ejercida sobre un elemento de la superficie de la esfera y proyectando estas componentes en la dirección de $\vec{u}$, se encuentra [1, Landau-1985]

$$F = \oint(-pcos\theta + \sigma'_{rr}cos\theta - \sigma'_{r\theta}sen\theta)df \tag{37}$$

donde la integración es realizada sobre la totalidad de la superficie de la esfera, donde los esfuerzos cortantes vienen dados por

$$\sigma'_{rr} = 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \sigma'_{r\theta} = \mu(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}) \tag{38}$$

Al sustituir (33) y (34) se obtiene que en la superficie de la esfera $r = R$, los esfuerzos cortantes son

$$\begin{aligned}\sigma'_{rr} &= 2\mu ucos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right)_{r=R} \\ &= 2\mu ucos\theta\left(\frac{3R}{2r^2} - \frac{3R^3}{2r^4}\right)_{r=R} = 0\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{r\theta} = -\mu\Bigg(&-\frac{1}{r}usen\theta(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}) + usen\theta(\frac{3R}{4r^2} + \frac{3R^3}{4r^4}) \\ &-\frac{1}{r}usen\theta(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3})\Bigg)_{r=R} = -\frac{3\mu}{2R}usen\theta\end{aligned} \tag{40}$$

Por otro lado, la presión p dado en (36) en $r = R$ es

$$p = p_0 - \mu \frac{3\vec{u}.\hat{r}}{2r^2} R \bigg|_{r=R} = p_0 - \frac{3\mu}{2R} ucos\theta \tag{41}$$

Con los resultados (39), (40) y (41), evaluamos la integral (37)

$$\begin{aligned} F &= \oint (-p_0 cos\theta + \frac{3\mu}{2R} ucos^2\theta + \frac{3\mu}{2R} usen^2\theta) df \\ &= \oint (-p_0 cos\theta + \frac{3\mu}{2R} u) df \end{aligned} \tag{42}$$

Si tomamos, como es usual, la presión en el infinito igual a cero , $p_0 = 0$, entonces la integral (42) se reduce a

$$F = \oint (\frac{3\mu}{2R} u) df = \frac{3\mu}{2R} u \oint df \tag{43}$$

por lo tanto

$$F = \frac{3\mu}{2R} u(4\pi R^2) = 6\pi R\mu u \tag{44}$$

Finalmente, como la fuerza de arrastre está dirigida en la dirección z, entonces

$$\vec{F} = 6\pi R\mu u\hat{e}_z \tag{45}$$

A esta formula se denomina *Fórmula o Ley de Stokes.*

III. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La presión ejercida por un fluido de viscosidad μ sobre la superficie de la esfera de radio R viene dado por

$$p_0 - \frac{3\mu}{2R} ucos\theta$$

siendo p_0 la presión en el infinito.
El arrastre que actúa sobre la esfera que se mueve lentamente en un fluido viene dado por la *ley de Stokes*, matemáticamente es escrita como

$$F = 6\pi R\mu u$$

El arrastre es proporcional a la primera potencia de la velocidad u y de la dimensión lineal del cuerpo R. La dependencia del arrastre con la velocidad y la dimensión es válida para cuerpos que se mueven lentamente, aunque sean de otras formas. La dirección del arrastre sobre un cuerpo de forma arbitraria no es la misma que la de la velocidad.[1, Landau-1985]

[1] L. Landau, E. Lifshitz *Mecánica de Fluidos.* Vol 6. Reverté. Barcelona, 1985.
[2] Y. Cengel, J.Cimbala *Mecánica de Fluidos* Fundamentos y aplicaciones, Mc Graw-Hill, México, 2006.
[3] Rieutord, M.*Fluid Dynamics* An introduction, Springer, USA-2015.
[4] Zill, D *Ecuaciones diferenciales* , 3ra Ed, Mc Graw Hill, México-2008.
[5] J. Garcia *Análisis Físico matemático de la ley de Stokes y su incidencia en el desarrollo de las teorías físicas*, Universidad Pedagógica Nacional, 2014.